

第一章习题解答

1. 在下列各对数中, X 是精确值 a 的近似值

(1) $a = 3.1, x = 3.1$

(2) $a = 1/7, x = 0.143$

(3) $a = 1/1000, x = 0.0031$

(4) $a = 100/7, x = 14.3$

试估计 x 的绝对误差和相对误差。

解: (1) $e = 3.1 - 3.1 = 0.0416, r = e/x = 0.0143$

(2) $e = 0.143 - 1/7 = 0.0143, r = e/x = 0.1$

(3) $e = 0.0031 - 1/1000 = 0.0279, r = e/x = 0.9$

(4) $e = 14.3 - 100/7 = 0.0143, r = e/x = 0.001$

2. 已知四个数: $x_1=26.3, x_2=0.0250, x_3=134.25, x_4=0.001$ 。试估计各近似数的有效位数和误差限, 并估计运算 $\mu_1 = x_1 x_2 x_3$ 和 $\mu_2 = x_3 x_4 / x_1$ 的相对误差限。

解: $x_1=26.3, n=3, x_1=0.05, r_{x1} = x_1/x_1 = 0.19011 \times 10^{-2}$

$x_2=0.0250, n=3, x_2=0.00005, r_{x2} = x_2/x_2 = 0.2 \times 10^{-2}$

$x_3=134.25, n=5, x_3=0.005, r_{x3} = x_3/x_3 = 0.372 \times 10^{-4}$

$x_4=0.001, n=1, x_4=0.0005, r_{x4} = x_4/x_4 = 0.5$

由公式: $e_r(\mu) = e(\mu) / \mu = 1/\mu \sum_{i=1}^n r_i x_i$

$e_r(\mu_1) = 1/\mu_1 [x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_2 + x_1 x_2 + x_3]$

$= 0.34468/88.269275$

$= 0.0039049$

$e_r(\mu_2) = 1/\mu_2 [-x_3 x_4 / x_1^2 + x_1 + x_4 / x_1 + x_3 + x_3 / x_1 + x_4]$

$= 0.49707$

3. 设精确数 $a > 0, x$ 是 a 的近似值, x 的相对误差限是 0.2 , 求 $\ln x$ 的相对误差限。

解: $r = \sum_{i=1}^n r_i x_i / x_i$

$= 1/\ln x \cdot 1/x \cdot x = r_x / \ln x = 0.2 / \ln x$ 即 $r = 0.2 / \ln x$

4. 长方体的长宽高分别为 $50\text{cm}, 20\text{cm}$ 和 10cm , 试求测量误差满足什么条件时其表面积的误差不超过 1cm^2 。

解: $S = 2(xy + yz + zx)$

$r_S = [(x+y)z + (y+z)x + (z+x)y] / (xy + yz + zx)$

$x = y = z$

$r_z = (x+y+z) \cdot x / (xy + yz + zx) < 1$

$x < 17/6 = 1.0625$

5. 已知 $p(x) = (x - 10)^4 + 0.200(x - 10)^3 + 0.0500(x - 10)^2 - 0.00500(x - 10) + 0.00100$

用秦九韶法计算 $p(10.11)$, 计算用 3 位有效数字. 并求此问题的条件数 $\text{Cond}(f(x))$.

解: $p(x) = (x - 10)((x - 10)((x - 10)((x - 10) + 0.200) + 0.0500) - 0.00500) + 0.00100$

故 $p(10.11) = 0.11(0.11(0.11(0.11 + 0.200) + 0.0500) - 0.00500) + 0.00100$

$= 0.0014676 = 0.147 \times 10^{-2}$

$$\text{Cond}(f(x)) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

$$\text{Cond}(p(10.11)) = \left| \frac{10.11 \cdot p'(10.11)}{p(10.11)} \right| = 0.6291$$

6. 改变下列表达式，使计算结果更准确。

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, |x| \leq 1 \quad (2) \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}, |x| \leq 1$$

$$(3) \frac{(1-\cos x)}{x}, x \neq 0, |x| \leq 1 \quad (4) \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}, |x| \leq 1$$

解：(1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$$(2) \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x} = \frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

$$(3) \frac{(1-\cos x)}{x} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$(4) \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}$$

7. 计算 $(\sqrt{2}-1)^6$ 的近似值，取 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 。利用以下四种计算格式，试问哪一种算法误差最小。

$$(1) \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \quad (2) (3-2\sqrt{2})^3$$

$$(3) \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \quad (4) 99-70\sqrt{2}$$

解：计算各项的条件数 $\text{cond}(f(x)) = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$

$$= f_1(x) = \frac{1}{(x+1)^6}, \text{cond}(f_1(x))|_{x=1.414} = 20.4804$$

$$f_2(x) = (3-2x)^3, \text{cond}(f_2(x))|_{x=1.414} = 49.3256$$

$$= f_3(x) = \frac{1}{(3+2x)^3}, \text{cond}(f_3(x))|_{x=1.414} = 49.4448$$

$$f_4(x) = 99-70x, \text{cond}(f_4(x))|_{x=1.414} = 4949$$

由计算知，第一种算法误差最小。

8. 考虑无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 它是微积分中的发散级数。在计算机上计算该级数的部分和，会得到怎样的结果？为什么？

解：在计算机上计算该级数的是一个收敛的级数。因为随着 n 的增大，会出现大数吃小数的现象。

9. 通过分析浮点数集合 $F = (10, 3, -2, 2)$ 在数轴上的分布讨论一般浮点数集的分布情况。

解：浮点数集合 $F = (10, 3, -2, 2)$ 在数轴上离原点越近，分布越稠密；离原点越远，分布越稀疏。一般浮点数集的分布也符合此规律。

10. 试导出计算积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+4x} dx$ ($n = 1, 2, 3, 4$) 的递推计算公式 $I_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - I_{n-1} \right)$ ，用此递

推公式计算积分的近似值并分析计算误差，计算取三位有效数字。

$$= \text{解: } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+4x} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x^n + x^{n-1} - x^{n-1}}{1+4x} dx = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 x^{n-1} dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+4x} dx \right)$$

$$I_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - I_{n-1} \right)$$

$$= I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+4x} dx = \frac{1}{4} \ln 5 \approx 0.402$$

$$I_1 = \frac{1}{4} (1 - I_0) \approx 0.150, \quad I_2 = \frac{1}{4} (1 - I_1) \approx 0.213$$

$$I_3 = \frac{1}{4} (1 - I_2) \approx 0.197, \quad I_4 = \frac{1}{4} (1 - I_3) \approx 0.201$$

$$e_n = I_n - \bar{I}_n = -\frac{1}{4} (I_{n-1} - \bar{I}_{n-1}) = \dots = \frac{(-1)^n}{4^n} e_0$$

此算法是数值稳定的。